Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych - pochodne cząstkowe

Niech funkcja $z = f(x, y)$ będzie określona w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$.

Definicja. *Pochodną cząstkową rzędu pierwszego* funkcji $z = f(x,y)$ względem zmiennej x w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ nazywamy granicę (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Pochodne cząstkowe funkcji $z = f(x,y)$ względem zmiennej x oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x,y).$$

Definicja. *Pochodną cząstkową rzędu pierwszego* funkcji $z = f(x,y)$ względem zmiennej y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ nazywamy granicę (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Pochodne cząstkowe względem zmiennej y oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y(x,y).$$

Pochodną cząstkową względem danej zmiennej obliczamy jak zwykłą pochodną funkcji jednej zmiennej, drugą zmienną traktując jako stały parametr. Można zatem stosować te same reguły różniczkowania, jakie zostały wprowadzone dla funkcji jednej zmiennej, tj. wzory na pochodną sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu oraz funkcji złożonej.

Podobnie definiujemy, oznaczamy oraz obliczamy pochodne cząstkowe funkcji trzech i większej liczby zmiennych.

Przykład. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

a) $z = f(x,y) = 2x^3y + xy^2 - 3y^5 + 7x - 3$,

b) $z = f(x,y) = \mathrm{tg}(3xy + y^2)$,

c) $z = f(r,\varphi) = r^2 \mathrm{e}^{3r+\cos\varphi}$,

d) $z = f(x,y) = \mathrm{arctg}\dfrac{xy}{x+y}$,

e) $u = f(x,y,z) = \ln(x^2y + y^3 + xz)$.

Rozwiązanie.

a) $z'_x = 6x^2y + y^2 + 7$, $\quad z'_y = 2x^3 + 2xy - 15y^4$,

b) Mamy tutaj do czynienia z funkcją złożoną. Jej pochodna będzie zatem iloczynem pochodnej funkcji zewnętrznej (względem funkcji wewnętrznej) przez pochodną funkcji wewnętrznej.

$$z'_x = \frac{1}{\cos^2(3xy + y^2)} \cdot 3y = \frac{3y}{\cos^2(3xy + y^2)},$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos^2(3xy + y^2)} \cdot (3x + 2y) = \frac{3x + 2y}{\cos^2(3xy + y^2)}.$$

c) Zauważmy, że obliczając pochodną cząstkową względem zmiennej r będziemy musieli zastosować wzór na pochodną iloczynu. Dla odmiany zastosujmy również inne oznaczenia pochodnych:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r\,\mathrm{e}^{3r+\cos\varphi} + r^2\mathrm{e}^{3r+\cos\varphi}\cdot 3 = (3r^2+2r)\,\mathrm{e}^{3r+\cos\varphi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r^2\mathrm{e}^{3r+\cos\varphi}\cdot(-\sin\varphi) = -r^2\sin\varphi\,\mathrm{e}^{3r+\cos\varphi}.$$

d) Mamy tu do czynienia z funkcją złożoną, w której funkcją wewnętrzną jest iloraz dwóch funkcji. Stosując odpowiednie wzory otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2}\cdot\frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)^2}+\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}}\cdot\frac{yx+y^2-xy}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2y^2}\cdot\frac{y^2}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+2xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2}\cdot\frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)^2}+\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}}\cdot\frac{x^2+xy-xy}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2y^2}\cdot\frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{x^2y^2+x^2+y^2+2xy}.$$

e) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2y+y^3+xz}\cdot(2xy+z) = \frac{2xy+z}{x^2y+y^3+xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2y+y^3+xz}\cdot(x^2+3y^2) = \frac{x^2+3y^2}{x^2y+y^3+xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2y+y^3+xz}\cdot x = \frac{x}{x^2y+y^3+xz}.$$

Definicja. Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $f_x'(x,y)$ i $f_y'(x,y)$ funkcji $z=f(x,y)$, to pochodne tych pochodnych (jeżeli istnieją) nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji $z=f(x,y)$.

Dla funkcji dwóch zmiennych mamy cztery pochodne cząstkowe rzędu drugiego:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Pochodne cząstkowe f''_{xx} i f''_{yy} nazywamy *pochodnymi czystymi*, a pochodne f''_{xy} i f''_{yx} nazywamy *pochodnymi mieszanymi.*

Twierdzenie. (*Schwarza*). Jeżeli w danym punkcie istnieją pochodne mieszane i są ciągłe, to są w tym punkcie równe.

Przykład. Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu.

a) $z = 2x^4 - xy^2 + 5y^3 - 2$, b) $z = \sin(xy + \mathrm{e}^{2y})$,

Rozwiązanie.

a) Obliczamy najpierw pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$z'_x = 8x^3 - y^2$, $z'_y = -2xy + 15y^2$. Stąd

$z''_{xx} = 24x^2$, $z''_{xy} = -2y$, $z''_{yx} = -2y$, $z''_{yy} = -2x + 30y$.

Zauważmy, że $z''_{xy} = z''_{yx}$ (Tw. Schwarza).

b) Zastosujemy inny zapis pochodnych.

Pochodne pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) \cdot y = y\cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x + 2\mathrm{e}^{2y})\cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) .$$

Pochodne drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cdot \left[-\sin(xy + \mathrm{e}^{2y})\right] \cdot y = -y^2 \sin(xy + \mathrm{e}^{2y}) ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) + y \cdot \left[-\sin(xy + \mathrm{e}^{2y})\right] \cdot (x + 2\mathrm{e}^{2y}) =$$

$$= \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) - (xy + 2y\mathrm{e}^{2y})\sin(xy + \mathrm{e}^{2y}) ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \cdot \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) + (x + 2\mathrm{e}^{2y}) \cdot \left[-\sin(xy + \mathrm{e}^{2y})\right] \cdot y =$$

$$= \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) - (xy + 2y\mathrm{e}^{2y})\sin(xy + \mathrm{e}^{2y}) .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\mathrm{e}^{2y} \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) + (x + 2\mathrm{e}^{2y}) \cdot \left[-\sin(xy + \mathrm{e}^{2y})\right] \cdot (x + 2\mathrm{e}^{2y}) =$$

$$= 4\mathrm{e}^{2y} \cos(xy + \mathrm{e}^{2y}) - (x + 2\mathrm{e}^{2y})^2 \sin(xy + \mathrm{e}^{2y}) .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

7. $z = 2x^3 - y^4 + 12x^2 y - 4x + 3$,

8. $z = 3x^2 y^2 - \sqrt{x} + 7xy - x \ln y$,

9. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$,

10. $z = 3x - 2x^3 y + 3\sqrt{xy}$,

11. $z = x\sin(x + 2y)$,

12. $z = y\mathrm{e}^{3x-2y}$,

13. $z = x^2 \cos(5xy - 4)$,

14. $z = 3^{xy}$,

15. $z = \dfrac{x - 2y}{3x + y}$,

16. $z = \sin x^y$,

17. $z = 2\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$,

18. $z = \ln\cos(x^2 - y^2)$,

19. $u = \ln(x + y^2 + z^3)$,

20. $u = x^2 \mathrm{e}^{yz}$,

21. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

22. $u = x\sin(y^2 + xz)$.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu (sprawdzić, czy dla tych funkcji zachodzi twierdzenie Schwarza):

23. $z = 6x - 5xy^3 + x^2$,

24. $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$,

25. $z = \ln(y^2 - x^2)$,

26. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

27. $z = \sin(3xy + y^2)$,

28. $u = 2x^4 y - x^2 z^3 + 3y^3 z^2$.

Obliczyć:

29. $f''_{xx}(0,1)$, jeżeli $f(x,y) = x^3 - 2x^2 y$,

30. $f''_{yx}(1,0)$, jeżeli $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$,

31. $f''_{xy}(0,0)$, jeżeli $f(x,y) = 3x^2 y + y^2 \mathrm{e}^{xy}$,

32. $f''_{yy}(1,\pi)$, jeżeli $f(x,y) = 2x^3 y - 5x^2 y^3 + x\cos 2y$.

Sprawdzić, czy dana funkcja spełnia podane równanie:

33. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (równanie Laplace'a),

34. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}y = z$,

35. $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$, $\quad 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$,

36. $z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$,

37. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch